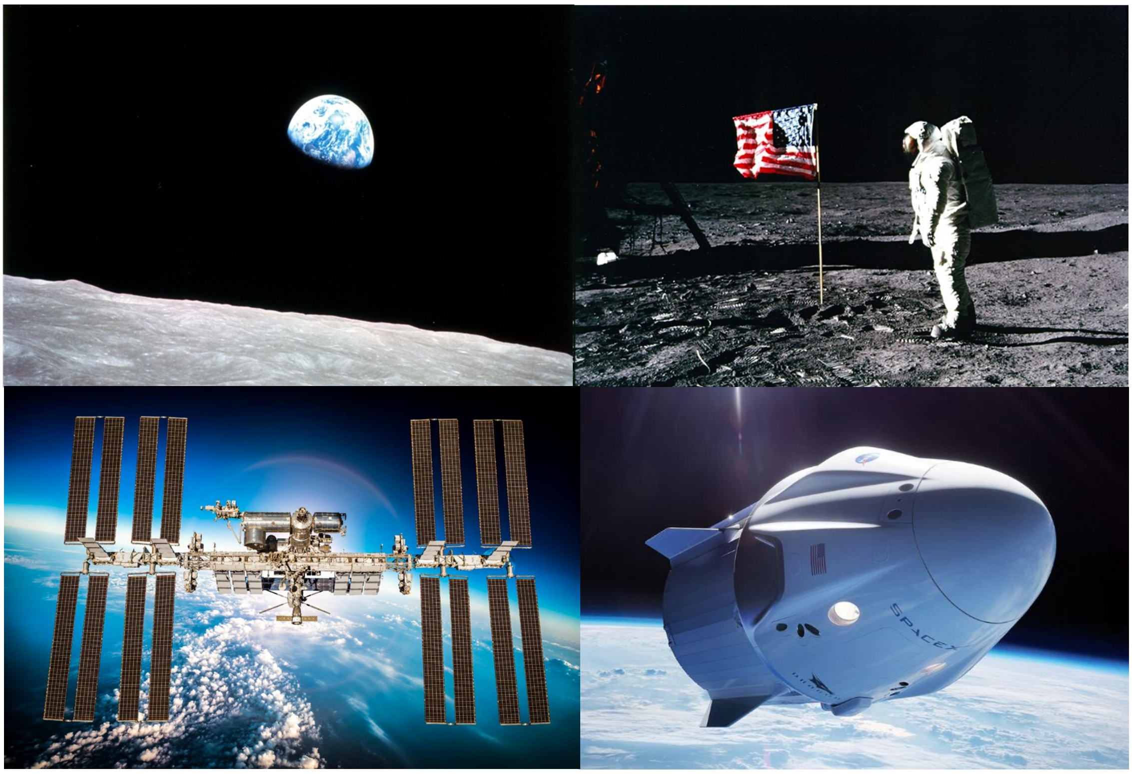
Chapter 1　実数と関数

Real numbers and functions



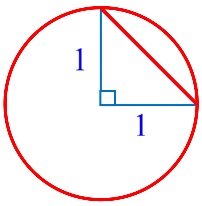
上左の写真は 1968 年にアポロ 8 号の乗員が月を旋回しながら地球を撮影した写真である．翌 1969 年，人類はアポロ 11 号でついに月面に降り立った（写真上右）．それまでの人類の科学と工学の発展が結実した歴史的瞬間であったと言えよう．近い将来に人類の有人飛行は火星にまで及び，また月までの観光シャトルが計画されているという（写真下左は国際宇宙ステーション ISS，下右は民間宇宙船 SpaceX Dragon）．それと共に地球のかけがえのなさが認識されて地球環境を守ることも科学技術の大きな任務となってきている．地球の未来は読者のような若い科学者・エンジニアの肩にかかっていると言っても過言ではないだろう．本コース Calculus の学習過程で身に付ける論理的・科学的思考が今後の研究の推進力となるだろう．まず，物理や工学の現象を数学の言葉で表現するところから始めよう．

1.1　数と式による表現

自然界の法則は数学の言葉で語られる．あらゆる言語が単語と文法とから成り立っているように，自然界を記述するにあたって，まず物の個数，大きさや重さ，空間における距離や時間等の物理量を数で表すところから話を始めよう．これらの間の関係を調べ，それらを支配する法則を見い出していく過程で微分積分という表現方法が発達し，さらにこれらが新しい自然法則の発見を促すという人類の発見の物語を数学の発展を通じて追体験するのが本書の目的である．

実数の定義

古代バビロニアの数字を記した粘土板（世界最古の三角関数表と言われている）



半径1の円周や 2 辺の長さが1の直角 2 等辺三角形の斜辺の長さは無理数

さて，自然界における最も原始的な数学的認識は事物を $1, 2, 3, \cdots$ と数え上げることであろう．これらの数は**自然数**（natural numbers）と呼ばれる．自然数の範囲では足し算と掛け算はできるが，引き算はいつでも可能という訳ではない．すなわち 0 や負の数が必要になってくる．こうして，$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ つまり**整数**（integers）の概念が生まれる．整数では和・差・積の演算ができる．一方，物を分割する必要性から分数の概念が生じ，p/q （p, q は整数，$q \neq 0$）の全体，すなわち**有理数**（rational numbers）の概念に到達する．周知の通り，有理数では代数的に和，差，積，商の四則演算が可能である．

有理数だけで自然界が記述できれば話は簡単なのだが，例えば円周率は $\pi = 3.141592\cdots$ と循環しない無限小数で表されるため，半径 1 の円周ですら有理数ではあり得ない．つまり有理数の極限は必ずしも有理数ではない．微分積分学では極限を取り扱うため，有理数を含んでそれらの極限をも含む数体系が必要になってくる．すなわちこれが**実数**（real numbers）である．つまり実数とは有理数にそれらの点列の極限を付け加えて得られる数体系であって，四則演算と極限操作で閉じている．有理数でない実数は**無理数**（irrational numbers）と呼ばれる．今後，実数の全体の集合を $\mathbb{R}$ で表そう（有理数は有限小数または循環小数，無理数は循環しない無限小数として特徴づけることができる．詳しくは Appendix A1 を参照）．

数直線

幾何学的に実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を一直線として表すことができる．これは通常**数直線**（real number line）と呼ばれる．各実数は数直線上の点に 1 対 1 に対応している（図 1.1 参照）．

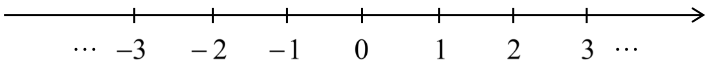


図 1.1　数直線

物理量を実数で表すとき，これに正負の概念が導入される．例えば，高度を問題にするとき，地表を原点として鉛直上向きを正の方向，下向きを負の方向とし

たり，気温を測るときに氷点を基準にして -20 [°C] と言ったりする．これを数直線でいえば，原点 0 より 1 に向かう向きを正の向き，その逆の向きを負の向きと定義すれば，正の側の半直線は**正の実数**(positive real numbers)に，負の側の半直線は**負の実数**（negative real numbers）に対応している．

順序

この正の数により実数に大小関係が定義される．すなわち，a が b より大きい（$a>b$）とは $a-b$ が正（$a-b>0$）であることとして定義される．このように定義された**順序**（order）によって実数の集合は線形に順序づけられる．すなわち，任意の実数 a, b に対して $a<b$，$a=b$，$a>b$ のうちのいずれか 1 つが成り立つ．この事実は実数の全体が数直線において一直線に並べられた連続体として表現されていることに対応している．また代数演算と順序の整合性として，正（負）の実数どうしの和は正（負），また符号の同じ（異なる）実数どうしの積は正(負)になることに注意する(詳しくは Appendix A1 を参照)．特に，次の性質に注意する．

$$a<b,\quad c>0 \quad \text{ならば} \quad ac<bc$$
$$a<b,\quad c<0 \quad \text{ならば} \quad ac>bc$$

問 1　この性質を証明せよ．また，同様に次の性質が成り立つことを証明せよ．

$$a\le b,\quad c>0 \quad \text{ならば} \quad ac\le bc$$
$$a\le b,\quad c<0 \quad \text{ならば} \quad ac\ge bc$$

例題 1　不等式 $\dfrac{1}{x-2} \le -1$ を解け．

解： まず分数の分母は 0 ではないので，$x=2$ は解から除かれることに注意する．$x>2$ のときは，$x-2>0$ を両辺にかけると $1\le 2-x$，すなわち $x\le 1$ となってこの場合の解はない．$x<2$ のときは，両辺に $x-2<0$ をかけると不等号が逆転して $1\ge 2-x$，すなわち $x\ge 1$．よって，解は $1\le x<2$．▮

区間

微分積分学においては実数の基本的な集合の単位として**区間**（interval）が用いられる．図 1.2 において代表的な区間とその表記法を示す．

$$(a,b)=\{x : a<x<b\}$$
$$[a,b]=\{x : a\le x\le b\}$$
$$[a,b)=\{x : a\le x<b\}$$
$$(a,\infty)=\{x : a<x<\infty\}$$
$$(-\infty,b]=\{x : -\infty<x\le b\}$$

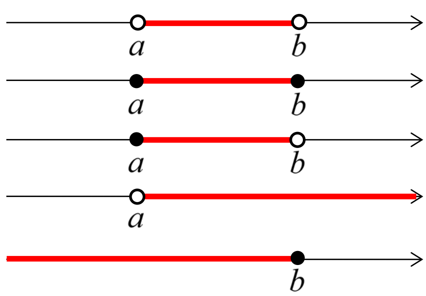


図 1.2　区間

上から順に (a,b) は**開区間**（open interval），$[a,b]$ は**閉区間**（closed interval），$[a,b)$ は**半開区間**（half-open interval），(a,∞) は**片側無限開区間**（unbounded open interval），$(-\infty,b]$ は**片側無限閉区間**（unbounded closed interval）等と呼ばれている．また，無限区間でない区間は**有界区間**（bounded interval）と呼ばれる．

和集合と共通部分

以後，微分積分学のみならず，いろいろな応用分野でしばしば区間の和集合や共通部分を表す必要が生ずる．特に情報理論では集合論理が重要である．一般に，集合 A, B があって，A と B の**和集合**（union）とは A または B のどちらかに属する元の集合であり，$A\bigcup B$ で表す．一方，A と B の**共通部分**（intersection）とは A と B の両方に属する元の集合であり，$A\bigcap B$ で表す．したがって，例えば区間 $A=[-2,1)$，$B=(0,3)$ の場合は

$$[-2,1)\bigcup(0,3)=[-2,3),\quad [-2,1)\bigcap(0,3)=(0,1)$$

となる（図 1.3 参照）．

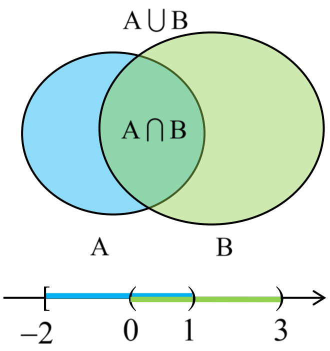


図 1.3

例題 2　不等式 $\dfrac{2}{x-1}>x+1$ を解け．

解：　与式より，

$$\frac{2}{x-1}-(x+1)=\frac{2-(x-1)(x+1)}{x-1}=\frac{3-x^2}{x-1}>0$$

$$\frac{x^2-3}{x-1}=\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-1}<0$$

を解くことになる．この分数式は x の値が $x=-\sqrt{3},\,1,\,\sqrt{3}$ で符号を変えるが，これらの点で区切られた区間のうちで分数式が負になるのは $x<-\sqrt{3}$ と $1<x<\sqrt{3}$ である（図 1.4 参照）．よって，解を区間の記号で表せば $(-\infty,-\sqrt{3})\bigcup(1,\sqrt{3})$ となる．▮

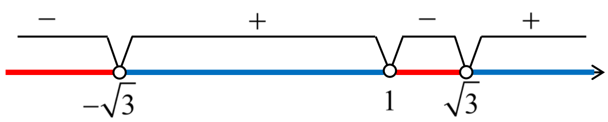


図 1.4

絶対値

物理や工学では値の正負の向きに関係なくその符号を取り去った大きさを問題にすることが多い．例えば，自動車を運転しているときはそのスピードメーターには速さが表示され，運動の方向をも含めた速度は日常では用いられない．このように，ある量の符号を取り去った非負の量をその絶対値という．すなわち，数学的に実数 a の**絶対値**（absolute value）$|a|$ とは，a が正または 0 なら a 自身，a が負なら $-a$ を表す．

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

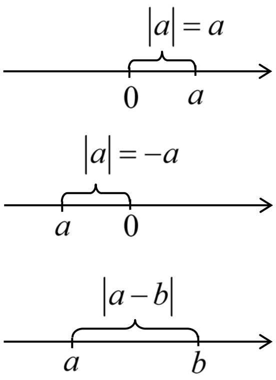


図 1.5

したがって，任意の実数 a に対して a の絶対値は常に正または 0 である．

$$|a| \geq 0 \quad (a \text{ は任意の実数})$$

数直線では，$|a|$ は点 a と原点 0 との**距離**（distance）を表す．このとき，$|a-b|$ は点 a と点 b との間の距離を表す（図 1.5 参照；これはどちらかの点を原点に移す平行移動を考えれば理解できる.）

問 2　上の絶対値の性質より，$c > 0$ のとき $|x| = c \iff x = \pm c$ を示せ．

定義より絶対値の等式について次の性質が成り立つ（Appendix A1 を参照）．

1. $|-a| = |a|$　　2. $|ab| = |a||b|$

3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$　　4. $|a^n| = |a|^n$　（n は自然数）

問 3　方程式 $|x^2| = |x|$ を解け．

また，絶対値の不等式について次の性質が成り立つ（Appendix A1 を参照）．

(1)　$-|a| \leq a \leq |a|$

(2)　$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

(3)　$|x| \geq a \ (>0) \iff x \leq -a$ または $x \geq a$

問 4　上の性質を証明せよ．

上の絶対値の性質から三角不等式

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

が証明される．実際，性質(1)より $-|a| \leq a \leq |a|$，$-|b| \leq b \leq |b|$ だから，$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$ であるが，性質(2)よりこれは $|a+b| \leq |a|+|b|$ を意味する．

例題 3　不等式　$1 < |2x-3| \leq 2$ を解け．

解：$|2x-3| > 1$ より $2x-3 > 1$ または $2x-3 < -1$，すなわち $x > 2$ または $x < 1$．一方，$|2x-3| \leq 2$ より $-2 \leq 2x-3 \leq 2$，すなわち $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$．これら 2 つの区間の共通部分だから，$\frac{1}{2} \leq x < 1$ または $2 < x \leq \frac{5}{2}$．区間の記号で書けば $[1/2, 1) \cup (2, 5/2]$ である．∎

別解１：$2x-3\geq 0$，すなわち $x\geq\frac{3}{2}$ のとき，$1<2x-3\leq 2$ だから $2<x\leq\frac{5}{2}$． $2x-3<0$，すなわち $x<\frac{3}{2}$ のとき，$1<3-2x\leq 2$ だから $\frac{1}{2}\leq x<1$．よって，解はこれらの和集合をとって $\frac{1}{2}\leq x<1$ または $2<x\leq\frac{5}{2}$．

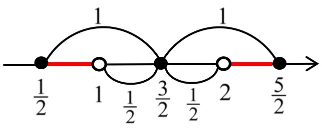


図 1.6

別解２：与式を $\frac{1}{2}<\left|x-\frac{3}{2}\right|\leq 1$ と書き換えると，x は数直線において点 $\frac{3}{2}$ からの距離が $\frac{1}{2}$ より大きく 1 より小さいか等しい点の集合だから $\frac{1}{2}\leq x<1$ または $2<x\leq\frac{5}{2}$ である（図 1.6 参照）． ▮

ε 近傍と誤差

微分積分学では極限の議論において，「x が a に近づく」ことを「x と a の距離が 0 に近づく」こととして定義される．また，このような議論において数学ではしばしば「点 a の ε **近傍**（neighborhood）」という用語を使用する．これは，数直線において点 a からの距離が ε 以下の点の集合

$$U_{\varepsilon}(a)=\{x:|x-a|<\varepsilon\}$$

である．ここで，

$$|x-a|<\varepsilon \iff -\varepsilon<x-a<\varepsilon \iff a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$

に注意すれば，これは区間 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ に他ならない（図 1.7 参照）．

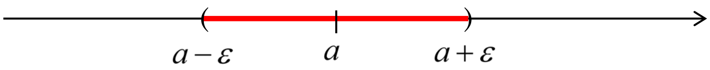


図 1.7　点 a の ε 近傍 $U_{\varepsilon}(a)$

この表現法は物理や工学においてもよく用いられる．例えば，ある長さの測定器による測定値が 0.0127 [cm] で測定誤差が 0.0002 [cm] ならば，実際の長さを x とすると

$$|x-0.0127|\leq 0.0002$$

を満たすと考えられる．すなわち

$$0.0125\leq x\leq 0.0129$$

が真の長さ x がとりうる区間である．このように，絶対値は数学全般や物理・工学への応用において距離や大きさの評価によく利用されるので，その演算に習熟しておく必要がある．

式による表現

以上では物理量が実数で表されるとしてその性質を学習してきたが，上述のように実際は観測の限界によって測定値には誤差があり，厳密に数値としての値を与えることは不可能である．また，刻一刻変化する．そこで，その測定不能な値を文字で表しておくと都合がよい．このとき物理法則は物理量を表す文字

の間の関係式として表されることになる．言語で言えば，式は1つの文に対応するとも言えるだろう．

例えば，ニュートンの運動の法則は物体の質量を $m\,[\mathrm{kg}]$，物体に作用する力を $F\,[\mathrm{N}]$，物体に生じる加速度を $a\,[\mathrm{m/s^2}]$ とすると，MKS 単位系で

$$F = ma$$

と表される．これは物理法則を見事なまでに簡潔な式で表した例と言えよう．（この式が成り立つようにMKS 単位系が定義されている．MKS 単位系については本節末の「物理量の単位と次元について」を参照）．

別の例を挙げよう．地上 $h_0\,[\mathrm{m}]$ の高さから初速 $v_0\,[\mathrm{m}]$ で物体を投げ上げるとき，t 秒後のボールの高さを $h(t)\,[\mathrm{m}]$，速度を $v(t)\,[\mathrm{m/s}]$ とすると，

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0, \quad v(t) = -gt + v_0$$

で与えられる（ただし，g は重力加速度の大きさを表す）．この式をある特定のボールの運動に適用して，それらの文字に具体的な数値を代入すれば等号が成り立つことを意味している．

累乗と指数法則

そこで，これからの応用に備えて，いろいろな式について考察しておこう．最も簡単な式は1つの文字の式で，その文字を仮に a とすると，$a, a^2, a^3, \cdots$であろう．一般に，a の n 乗 a^n（n は自然数）の形の式を a の**累乗**(power)という．a の累乗について次の**指数法則**（laws of exponents）が成り立つことは容易に確かめられる．

(1)　$a^m a^n = a^{m+n}$　　(2)　$(a^m)^n = a^{mn}$　　(3)　$(ab)^n = a^n b^n$

$a \neq 0$ のとき，累乗の割り算に関しては次の関係式が成り立つ．

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & (m \geq n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$$

ただし，$a^0 = 1$ と定義する．このとき，負の整数 $n = -k$ $(k > 0)$ に対して，

$$a^n = a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

と定義することによって，負の整数指数の場合に拡張され，上の指数法則は任意の整数の指数に関して成り立つことがわかる（尚，この指数法則は後に任意の実数 m, n の場合に拡張される（定理 1.12 参照））．

科学的表記法
有効数字

物理量を表すのに $a.bc\cdots\times 10^n$ という表記法がよく用いられ，これを**科学的表記法**（scientific notation）といい，$abc\cdots$の文字数を**有効数字**の桁数

（significant digits）という．例えば，光の速さは有効数字 5 桁で 2.9979×10^8 [m/s] である．また，ある化学物質1モルに含まれる分子数は 6.022×10^{23} 個である．これらの量の間の計算には上の指数法則が用いられる．

2013 年 9 月火星に到達した NASA 火星探査機 MAVEN

例題 4　NASA は 2030 年代に有人宇宙船を火星に送り込む計画を立てている．火星は地球から 5,600 万 [km] の距離にあり， 片道 9 カ月かけて辿り着くという．この宇宙船の平均の速さを MKS 単位系かつ科学的表記法で有効数字 2 桁で求めよ．

解：$\dfrac{5600\times10^4\times10^3}{9\times30\times24\times60\times60}=\dfrac{5.6\times10^{10}}{2.3328\times10^7}\approx2.4\times10^3$ [m/ s]　▮

平方根

実数 $a>0$ に対して，$b^2=a$ となる実数 $b>0$ を a の正の**平方根**（square root）といい $\sqrt{a}$ で表す．また，$\sqrt{0}=0$ と定義する．このとき，任意の実数 a に対して

$$|a|=\sqrt{a^2}$$

である．なぜなら，$\sqrt{a^2}$ は 2 乗すれば a^2 になる正または 0 の数を表す．したがって，a が正または 0 ならば $\sqrt{a^2}=a$，a が負ならば $\sqrt{a^2}=-a$ である．一方，絶対値の定義からこれは $|a|$ に等しい．

例題 5　方程式 $\sqrt{x}+1=2\sqrt{1-x}$ を解け．

解：　両辺を 2 乗すると，

$$x+2\sqrt{x}+1=4(1-x)\quad すなわち\quad 2\sqrt{x}=3-5x$$

さらに 2 乗すると，

$$4x=9-30x+25x^2$$

よって，

$$25x^2-34x+9=(x-1)(25x-9)=0$$

これを解いて，$x=1,\ \dfrac{9}{25}$．これらを与式に代入すると $x=1$ は不適であることがわかる．したがって，解は $x=\dfrac{9}{25}$．　▮

多項式・有理式・無理式

さて，1 文字の累乗の定数倍の和の形に表される式を**多項式**（polynomial）という．例えば上述のボールの高さを表す式 $h(t)$ 等である．これらの多項式の加減乗除はすでに高校で学習した．その際，実数の場合と同様に，多項式の分数 $p(x)/q(x)$ の形で表される式を**有理式（分数式）**（rational expression）とよぶ．例えば例題 1 および例題 2 の左辺の式等である．また，多項式の平方根の形の式 $\sqrt{p(x)}$ を**無理式**（irrational expression）という．特に，$\sqrt{p(x)}$ が定義され

るのは $p(x) \geq 0$ を満たす x の値に限られることに注意する．例えば，例題 5 の無理式で $\sqrt{x}$，$\sqrt{1-x}$ はそれぞれ $x \geq 0$，$x \leq 1$ で定義された式である（無理式は後に多項式の n 乗根の場合に拡張される）．

問 5　有理式や無理式で与えられる物理量の例を挙げよ．

応用問題ではいろいろな量の間の関係が数式の等式や不等式として表される．したがって，以下のいくつかの例題や演習問題で学ぶように，まず求める量をある文字で表して問題の状況を数式で表現し，得られた等式や不等式を解くことになる．このようなプロセスに習熟することに留意しながら学習しよう．

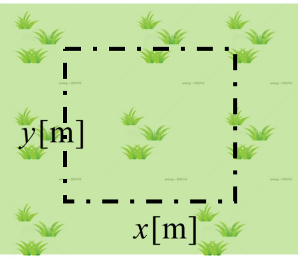


図 1.8

例題 6　ある放牧地で 100 [m^2] の土地を餌場として柵で囲いたい．餌場の形を長方形にし，柵の長さを 50 [m] 以内にするにはそれぞれの辺の長さの取りうる範囲を求めよ．

解：長方形の 2 辺の長さを x [m]，y [m] とすると（図 1.8 参照），$xy = 100$．ただし，$2(x+y) \leq 50$ である．$y = \dfrac{100}{x}$ として不等式に代入すると，$x + \dfrac{100}{x} \leq 25$．ここで，$x > 0$ だから $x^2 - 25x + 100 \leq 0$．すなわち，$(x-5)(x-20) \leq 0$ を解いて，求める範囲は $5 \leq x \leq 20$ である．∎

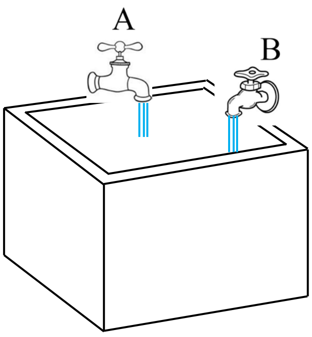


図 1.9

例題 7　1200 [ℓ] 入る水槽に 2 つの蛇口 A と B を同時に開いて水槽を一杯に満たすのに 12 分を要した（図 1.9 参照）．また，A の蛇口のみを用いれば B の蛇口のみを用いて水槽を一杯に満たすより 10 分早いという．このとき，A, B それぞれの蛇口のみで水槽を一杯に満たすのに要する時間を求めよ．

解：A の蛇口のみで水槽を一杯に満たすのに要する時間を x 分とすると，その流量は $\dfrac{1200}{x}$ [ℓ/min] である．一方，B の蛇口のみで水槽を一杯に満たすのに要する時間は $(x+10)$ 分だから，その流量は $\dfrac{1200}{x+10}$ [ℓ/min] である．両方の蛇口を同時に用いると 12 分かかるので方程式

$$\left(\frac{1200}{x} + \frac{1200}{x+10}\right) \times 12 = 1200$$

を得る．両辺から 1200 を約して $x(x+10)$ を掛けると，

$$\{(x+10) + x\} \times 12 = x(x+10)$$

すなわち，整理して

$$x^2 - 14x - 120 = (x-20)(x+6) = 0$$

題意より明らかに，$x > 0$ だから $x = -6$ は不適．よって，$x = 20$ [min]．すなわち，A のみでは 20 分，B のみでは 30 分かかることになる．∎

演習問題 1.1

A

A1　次の数の中で自然数，整数，有理数，無理数はそれぞれどれか．

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　(2) $1.666\cdots$　　(3) 3.14159

(4) $-\sqrt{\dfrac{64}{16}}$　　(5) $\sqrt{121}$

A2　次の不等式を解け．

(1) $-2 \leq 4-3x < 1$　　(2) $3 < \dfrac{2}{x} < 4$

(3) $\dfrac{1}{x+1} > 2$

A3　次の表式を絶対値を含まない表式で表せ．

(1) $\left|-\sqrt{3}\right|^2$　　(2) $|3-\pi|$　　(3) $\left|\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}\right|$

A4　数直線の点 -2 からの距離が $\frac{1}{3}$ 以下の点の集合を求めよ．

A5　次の絶対値を含む方程式・不等式を解け．

(1) $|3-4x| = 2$　　(2) $|x| = 2x-1$

(3) $|3x-5| > 1$　　(4) $2 < |5-4x| \leq 3$

A6　次の式を簡単にせよ．

(1) $\dfrac{(a^2b^3)^2}{(\frac{1}{2}ab)^3}$　　(2) $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

(3) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}$

A7　次の方程式・不等式を解け．

(1) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$　　(2) $x^3 - x \leq 0$

(3) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{3}$　　(4) $\dfrac{x}{x+2} \leq x$

(5) $\sqrt{1-x^2} = 2x-1$　　(6) $\sqrt{x} = 2-x$

A8　地球を半径が 6.4×10^3 [km] の球とし，光の速さを 3.0×10^8[m/s] とするとき，光は 1 秒間で地球の何周分の距離を走るか，有効数字 2 桁で答えよ．

A9　プールからイルカが初速 10 [m/s] でジャンプするとき，t 秒後のイルカの水面からの高さを $h(t)$[m] とすると，

$$h(t) = -5t^2 + 10t$$

で与えられる．（ただし，重力加速度の大きさを 10 [m/s^2] とした）．

　このとき，イルカが空中に飛び上がっている時間の区間を求めよ．

A10　通常，駅まで歩いて 10 分の距離を，今日は後半の半分の距離を走ったので 7 分で着いた．最初から走れば何分かかるか．

B

B1　任意の実数 a に対して $a^2 \geq 0$ を示せ．

B2　「$a<b$ ならば $a^2<b^2$」は正しいか．正しいときは証明し，正しくないときは反例を示せ．

B3　$a>0$，$b \geq 0$ のとき，次の関係を証明せよ．また，$>$を$\geq$で置き換えても成り立つことを示せ．

$$a>b \quad \Leftrightarrow \quad a^2>b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a}>\sqrt{b}$$

B4　不等式 $a < \dfrac{1}{x} < b$ を解け．

B5　次の方程式・不等式を解け．

(1) $\left|(x-1)^2\right| + |1-x| = 2$　　(2) $|2x-1| = x$

(3) $\left|1-x^2\right| > 2x$

B6　ある長方形の物体を測定したところ，縦が 2.45 [cm] で横が 3.82 [cm] であった．測定の誤

差を 0.03 [cm] とすると，物体の真の面積はどのような範囲にあると考えられるか．

B7　次の方程式・不等式を解け．

(1) $x^4-3x^2+2=0$　(2) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\le 2$

(3) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$　(4) $x-\sqrt{x}-12<0$

(5) $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=1$

B8　水 1 滴（0.05 [ml] ）に含まれる水分子の数を有効数字 3 桁で求めよ．

B9　長さ 10 [m] のはしごを垂直な壁に立てかけるとき，はしごの下端と壁との距離がはしごの上端と床との距離の半分以下ならばはしごは滑らずに静止するという．はしごを滑らずに静止させるには，はしごの下端と壁との距離をいくらにすればよいか．

B10　某教授の研究室では毎週 2 人の学生 A, B が小テストの採点業務をしている．先週あるクラスの採点をするのに 2 人が一緒に採点すると丁度 1 時間かかった．今週，同じ問題で同人数の別のクラスの答案を採点するのに，最初 A が 30 分間採点し，その後 B が引き継いで合計 2 時間 15 分かかった．この採点業務を A, B がそれぞれ 1 人で採点するのにかかる時間はいくらか．

C

C1「無理数＋無理数＝無理数」は正しいか．また，「無理数×無理数＝無理数」は正しいか．

C2　$\sqrt{2}$　は有理数でないことを証明せよ．

C3　$a>0$，$b>0$　のとき，不等式　$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$　を証明せよ．

C4　$a>0$，$b>0$　のとき，不等式

$$\sqrt{a+b}\ <\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\ \le\ \sqrt{2(a+b)}$$

を証明せよ．

C5　方程式　$|x|^2+2|x+1|=5$　を解け．

C6　任意の実数 a , b に対して不等式

$$\big||a|-|b|\big|\ \le\ |a-b|$$

を証明せよ．

C7　地球は太陽を中心とする半径 1 億 3000 万 [km] の円軌道を 1 年の周期で公転している．地球の公転の速さを MKS 単位系で求めよ．

C8　次の方程式・不等式を解け．

(1) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}+\dfrac{10}{x^2+x-6}=\dfrac{2}{x-2}$

(2) $\left|\dfrac{x-3}{x}\right|<x+1$　(3) $|x|\ =\ \sqrt{2-x^2}+1$

C9　ある直線形のビーチの波打ち際の地点 A から垂直に 40[m] 離れた地点 P にライフガードがスタンバイしている．もし，この地点の正面の沖合いの地点 Q で人がおぼれかかったとき，ライフガードが彼を助ける方法として次の 2 通りある (図 1.10 参照)．

(1) 直線的に A 点まで走り，そこから Q 点まで真っ直ぐ泳いで助けに向かう．

(2)　A 点から 30[m] 離れた波打ち際の B 点にあるアクアスクーターまでビーチを斜めに横切って走り，そこからアクアスクーターに乗って Q 点に向かう．

いま，ライフガードの走る速さを 8 [m/ s]，泳ぐ速さを 1.6 [m/ s]，またアクアスクーターの速度を 3.2 [m/ s] とするとき，アクアスクーターを用いた方が早く到達できるのは目標地点 Q が A からいくら以上離れているときか．

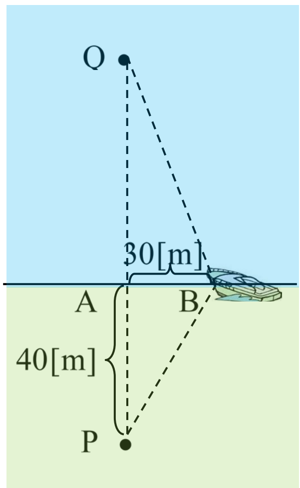


図 1.10

物理量の単位と次元について

本書は数学の入門書であるので，物理量の単位についてはその解説を本来物理や化学の教科書に譲るべきであるが，Calculus の教科書として応用問題を多く扱うため，本書を読み進める上での参考のために簡単に物理量の単位と次元について述べておこう．

１．SI 単位系

通常物理学では **MKS 単位系**，すなわち長さを [m]（メートル），質量を [kg]（キログラム），時間を [s]（秒）の単位を用いる（これらの単位が物理的にどのように定義されているかは物理学の教科書を見て頂きたい）．これに，電流の強さ [A]（アンペア），熱力学的温度 [K]（ケルビン），物質量 [mol]（モル），光度 [cd]（カンデラ）を加えた７つの**基本単位**（base units）を組み合わせて全ての物理量を表す仕方を **SI 単位系**（Système International d'unités（仏），International System of Units（英））という．これに，大きさの度合いを示す10 の冪乗を表す接頭語をつけて，例えば$10^3\,[\mathrm{m}]=[\mathrm{km}]$，$10^{-2}\,[\mathrm{m}]=[\mathrm{cm}]$ のように表される．組み立て単位の例として，ニュートン $[\mathrm{N}]=[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}]$，ジュール $[\mathrm{J}]=[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}]$ 等がある．本書では，これら以外に慣用的な単位，例えば分 [min]，時間 [h]，リットル [L]（$=10^{-3}[\mathrm{m}^3]$），トン [t]（$=10^3[\mathrm{kg}]$），オングストローム［Å］（$=10^{-10}[\mathrm{m}]$）等を用いる．また，物理量の数値の表し方は，本文で説明したように**科学的表記法**が用いられる．以下では接頭語の一部を掲げる．

倍数	接頭語	記号	倍数	接頭語	記号
10^1	deca（デカ）	da	10^{-1}	deci（デシ）	d
10^2	hecto（ヘクト）	h	10^{-2}	centi（センチ）	c
10^3	kilo（キロ）	k	10^{-3}	milli（ミリ）	m
10^6	mega（メガ）	M	10^{-6}	micro（マイクロ）	μ
10^9	giga（ギガ）	G	10^{-9}	nano（ナノ）	n
10^{12}	tera（テラ）	T	10^{-12}	pico（ピコ）	p

２．物理量の次元

物理量を基本単位の量の組み合わせとして因数の冪乗の形で表したものを**次元**（dimension）という．例えば，長さの次元を L，時間の次元を T，質量の次元を M とすると，力の次元は質量×加速度より $\mathrm{MLT^{-2}}$ である．次元の解析から物理法則をある程度推定することが可能である．例えば，自由落体の問題では，落下距離 s を落下に要した時間 t，物体の質量 m，重力加速度 g を用いて，$s=C\,m^{\alpha}g^{\beta}t^{\gamma}$ と仮定するとしよう．このとき，次元の方程式は $\mathrm{L=M^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta}T^{\gamma}}$ となるが，両辺の指数を比較すれば，$\alpha=0$，$\beta=1$，$\gamma=2$ となって，$s=C\,g\,t^2$ であることがわかる．このような方法を**次元解析**（dimension analysis）という．

1.2　関数とグラフ

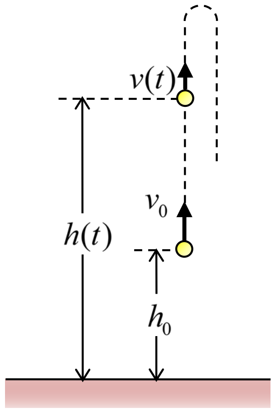
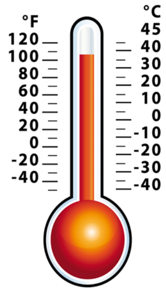


図 1.11



摂氏と華氏の換算

$\mathrm{F} = \dfrac{9}{5}\mathrm{C} + 32$

図 1.12

物体が運動するとき，その位置や速度は時間と共に変化する．例えば前節で取り上げたボールの投げ上げの問題では，t 秒後のボールの高さ $h(t)$ [m] と速度 $v(t)$ [m/s] は

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0, \quad v(t) = -gt + v_0$$

で与えられる（ただし，v_0 [m/s] は初速度，h_0 [m] は最初の高さ，g [m/s^2] は重力加速度の大きさである）．これらの表式は各時刻 t に対してボールの位置 $h(t)$ や速度 $v(t)$ を対応づけている（図 1.11 参照）．

このように，1 つの量と別の量の間の対応づけは我々の日常でよく経験することである．例えば，摂氏での温度 x[°C] を華氏での温度 y[°F] に変換する規則 f は

$$y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

と表される（図 1.12）．ただし，物質の温度は絶対温度 $0[°\mathrm{K}] = -273.15[°\mathrm{C}]$ 以上でなければならないから，この式は $x \geq -273.15$ に対してのみ意味がある．

一般に，これらの関係は必ずしも数式で与えられるとは限らない．例えば，国民 1 人 1 人に番号を付与する制度等がそうである．このような対応関係を抽象的に言い表したものが「関数」と呼ばれるものであって，これから読者の学ぶ数学や物理のみならず，工学やほとんどの応用数理科目においては対象の間の関係を関数を用いて解析していると言っても過言ではない．したがって，どのような対象にも当てはまるように，最も抽象的な集合の対応関係によって関数を定義しておこう．

関数の定義

定義 1.1　集合 X の各元 x に集合 Y の 1 つの元 y を対応させる規則 f を**関数**（function）といい，この対応を $f: X \to Y$ とかく．このとき，X を f の**定義域**（domain），関数値の集合 $f(X)$ を**値域**（range）という（図 1.13）．

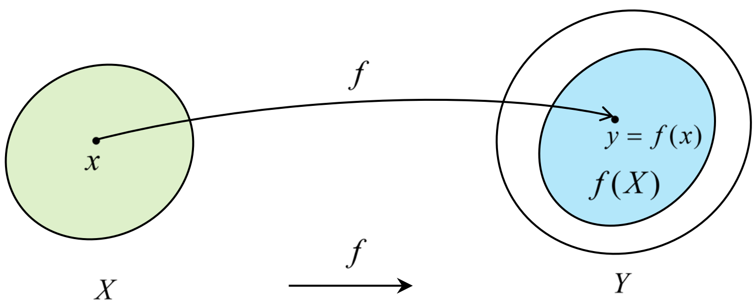


図 1.13　関数　$f: X \to Y$

上の関数の対応 $x \in X \mapsto y = f(x) \in f(X)$ において，$x \in X$ を**独立変数**（independent variable），$y \in f(X)$ を**従属変数**（dependent variable）と呼ぶ．本書では f の定義域を $D(f)$，値域を $R(f)$ で表す．関数 $f : X \to Y$ は，X, Y が抽象空間やベクトル空間のときは**写像**（mapping）と呼ばれることが多い．以下，いくつか例を挙げて説明しよう．

例 1　言語におけるネーミングや事物の単語表現も一種の関数と考えられる．ただし，複数のネーミングがある場合は定義 1.1 の意味での関数ではない．これらは「多価関数」と呼ばれ「関数」とは厳密に区別されなければならない．これが定義 1.1 で「1 つの」と強調した理由である．

問 1　ある市の各住民に対してその人が所有する車の登録番号を対応させるとき，これは関数を定義するか．また，各人の生年月日を対応させる場合はどうか．

例 2　2 進数表示で $x = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ と表された数 10 進数表示で $y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^k$ に変換する規則（例えば，$f(101) = 5$）は，2 進数表示された数の全体の集合から 10 進数表示された数全体への関数である．

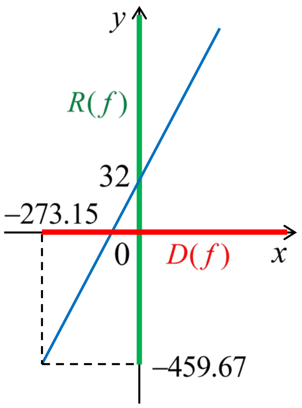


図 1.14

例 3　前述した摂氏での温度 x [°C] を華氏での温度 y [°F] に変換する規則

$$y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

において，この関数の定義域は摂氏（°C）での物質のとりうる温度の集合 $[-273.15, +\infty)$ であり，値域は華氏（°F）での物質のとりうる温度の集合 $[-459.67, \infty)$ となる（図 1.14 参照）．

多項式関数
有理関数
無理関数

例 4　前節で定義した式を用いていろいろな関数を定義することができる．$f(x)$ が多項式，有理式，無理式であるとき，それぞれ f を**多項式関数**（polynomial function），**有理関数**（rational function），**無理関数**（irrational function）という．一般に，これらの関数の定義域は，式が定義される最大の集合とする．ただし，実際の問題に応用された場合は，その問題の条件から関数の定義域は定まる．例えば，投げ上げの問題に出てきた

$$v(t) = -gt + v_0$$
$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

はそれぞれ多項式で定義された関数であるが，定義域は物体が地上に落下する時刻 t_0 までの間の時間の区間 $[0, t_0]$ であり，値域はそれぞれ物体のとりうる速度の集合，および高度の集合であって，これらは初期条件（v_0，h_0 の値）によって定まる．

関数のグラフ

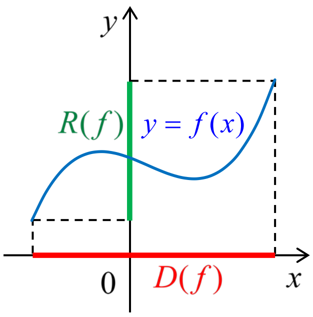


図 1.15

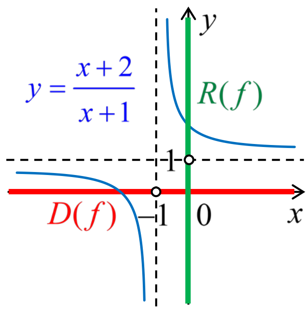


図 1.16

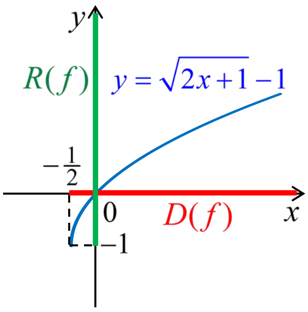


図 1.17

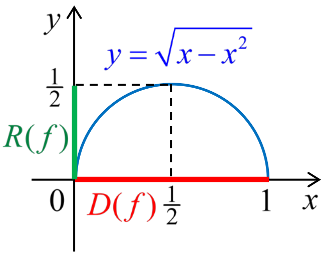


図 1.18

さて，このように関数は定義されるのだが，最初は抽象的でわかりにくいかもしれない．しかも関数が複雑になるとその対応関係を理解するのは極めて困難である．そこで，例 3 でも見たように，その対応関係を図で表して一目で理解させる手段が「グラフ」と呼ばれるもので，読者も日常生活において表や棒グラフ，折れ線グラフ等に慣れ親しんでいると思われる．これらは数学的にも立派な「グラフ」なのである．そこで，数学におけるグラフの定義を述べよう．

定義 1.2　関数 $f: X \to Y$ が与えられたとき，定義域の点 $x \in X$ とその関数値 $f(x) \in Y$ の対 $(x, f(x))$ 全体の集合を関数 f の**グラフ** (graph) という．

特に， X, Y が実数 $\mathbb{R}$ の部分集合のとき， 関数 $y = f(x)$ のグラフは $x \in D(f)$ を x 座標にもち $f(x) \in R(f)$ を y 座標にもつ 2 次元平面の点 $\big(x, f(x)\big)$ 全体の集合である（図 1.15 参照）．

有理関数や無理関数の場合は特に定義域に注意が必要である．例えば，

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 1$$

の定義域 $D(f)$ は分数の分母は 0 ではありえないから $x \neq -1$ を満たす実数の集合であり，値域 $R(f)$ は $x \neq 1$ である実数の集合である（図 1.16 参照）．

また，無理関数

$$f(x) = \sqrt{2x+1} - 1$$

の定義域は根号内 ≥ 0 の条件から $2x+1 \geq 0$，すなわち集合の記号で書けば $D(f) = \left\{x\colon x \geq -\dfrac{1}{2}\right\}$ であり，値域は $R(f) = \{x\colon x \geq -1\}$ であることは容易に確かめられる（図 1.17 参照）．これらは関数の表式に暗黙の内に含まれており，通常は明記されない（これらのグラフの描き方はすぐ後で学習する）．

例題 1　関数 $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ の定義域と値域を求めよ．

解： 根号内は正または 0 だから $x - x^2 = x(1-x) \geq 0$，すなわち $x(x-1) \leq 0$．これを解いて f の定義域は $0 \leq x \leq 1$．

また， $y = f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - (x - \dfrac{1}{2})^2}$ と変形すると $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ であることがわかる．よって，$D(f) = [0, 1]$，$R(f) = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ である（図 1.18 参照）． ■

1 次関数

まず，1 次関数のグラフについて復習しておこう（1 次関数は微分法において接線の概念として重要である）． 1 次関数の一般形は

$$y = mx + b$$

で与えられ，そのグラフは傾きが m で y 切片 b を通る直線である（図 1.19）.

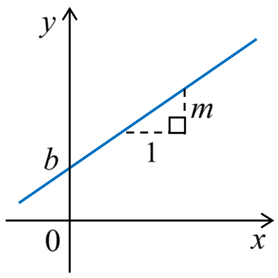


図 1.19

例題２　点 (a,b) を通り傾きが m の直線の方程式を求めよ.

解：求める式を $y=mx+c$ とおくと，これが (a,b) を通るから $b=ma+c$，すなわち $c=b-ma$．よって，$y=mx+b-ma=m(x-a)+b$．▮

例題３　２点 $P_1(a_1,b_1)$ および $P_2(a_2,b_2)$ を通る直線の方程式を求めよ.

解：P_1，P_2 を通る直線の傾きは $m=\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ である．よって，求める直線は点 (a_1,b_1) を通るから，例題２より $y=\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}(x-a_1)+b_1$．（図 1.20 参照）▮

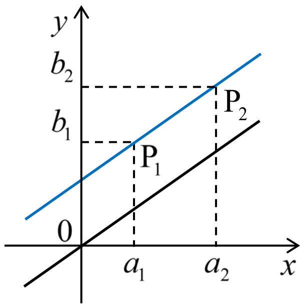


図 1.20

また，１次関数では切片形

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

も便利である．これは x 切片が a で y 切片が b の直線を表す（図 1.21 参照）.

例題４　１次方程式 $2x-3y=-5$ のグラフを描け.

解：与式を $\dfrac{x}{-5/2}+\dfrac{y}{5/3}=1$ と変形すると，x 切片が $-\dfrac{5}{2}$ で y 切片が $\dfrac{5}{3}$ の直線を表す（図 1.22）．▮

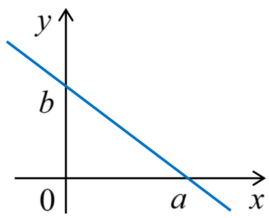


図 1.21

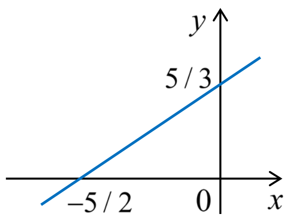


図 1.22

例題５　いまジェット旅客機が関空を離陸して成田に向けて飛行している．離陸して10分後に関空から 80 [km] 離れた A 市の上空を通過し，さらにその 20 分後には A 市から 200 [km] 離れた B 市の上空を通過した．ジェット機の飛行経路は直線であるとし，さらに A 市と B 市の間を飛行しているときは水平等速度直線運動であると仮定する．この間のジェット機の関空からの飛行距離 x [km] を離陸してからの時間 t [min] の関数として表せ.

解：題意から，A 市と B 市の間を飛行している間，$x(t)$ のグラフは $(10,80)$ および $(30,280)$ を通る直線である（図 1.23）．このグラフの傾き（＝平均速度）は，20 分間に 200[km] 移動したから，10 [km/min] である．したがって，この直線は点 $(10,80)$ を通り，傾きが 10 の直線だから（図 1.23 参照）

$$x(t)=10(t-10)+80=10t-20\,.\quad ▮$$

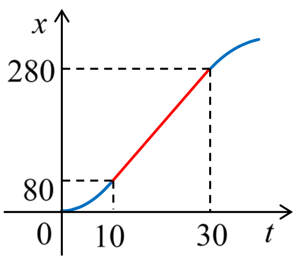


図 1.23

2 次関数

次に 2 次関数について復習しよう．2 次関数の一般形は $y = ax^2 + bx + c$ である．これを

$$y = a(x-p)^2 + q$$

と書き換えたとき，そのグラフは直線 $x = p$ に軸をもち，頂点の座標が (p, q) の放物線である．$a > 0\ (a < 0)$ のときは下（上）に凸になる．これは関数 $y = ax^2$ のグラフを x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動したグラフとして説明される．この平行移動の考え方は，2 次関数のみでなく有理関数，無理関数をはじめ，指数・対数関数，三角関数等の一般の関数で広く用いられる手法である．

平行移動

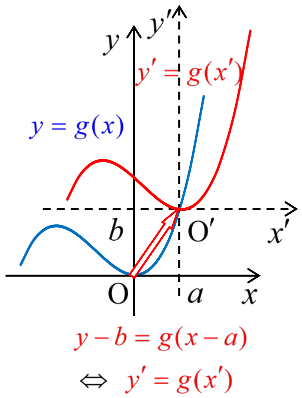


図 1.24

いま，描きたい関数を $y = f(x)$ とし，もしこの式を変形した結果他の関数 $g(x)$（通常グラフがよく知られた標準的な関数）を用いて

$$y - b = g(x - a)$$

とかけたと仮定しよう．ここで，新しい変数を

$$x' = x - a, \quad y' = y - b$$

で定義して新しい座標系 (x', y') に移ると，この新座標系での原点 O' は旧 (x, y) 座標系の $x = a$，$y = b$ の点 (a, b) である（図 1.24 参照）．このとき上の式は

$$y' = g(x')$$

とかける．仮定から (x', y') 座標系でこのグラフは描けるからそれを描いてみよう．これを (x, y) 座標系で眺めたものが求める $y = f(x)$ のグラフである．上のグラフの描き方からわかるように，求めるグラフは $y = g(x)$ のグラフを「x 方向に a，y 方向に b だけ**平行移動**（translation）」したものである（今後，これを「(a, b) だけ平行移動」と略記する）．

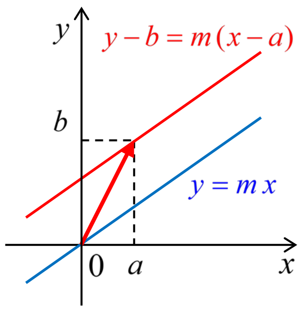


図 1.25

例えば，前節の例題 2 で求めた点 (a, b) を通り傾き m の直線の方程式 $y - b = m(x - a)$ は原点を通り傾き m の直線 $y = mx$ を (a, b) だけ平行移動したものとして求めることもできる（図 1.25 参照）．

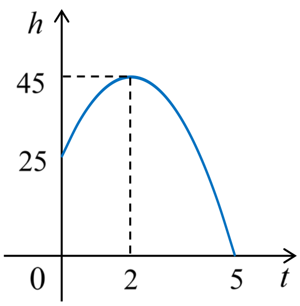


図 1.26

例題 6　地表から高さ 25 [m] の地点から初速 20 [m/s] でボールを投げ上げるとき，t 秒後のボールの高さ $h(t)$ [m] と速度 $v(t)$ [m/s] は

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 25, \quad v(t) = -10t + 20$$

で与えられる（ただし，重力加速度の大きさを簡単のために 10 [m/s^2] とした）．このとき，ボールの高さ $h(t)$ と速度 $v(t)$ および速さ $|v(t)|$ のグラフを描き，それぞれの定義域と値域を求めよ．また，ボールが最高点に達する時刻と最高点の高さ，およびボールが地表に落下するときの速さを求めよ．

解：まず，ボールが地表に落下するのは，

$$h(t) = -5(t^2 - 4t - 5) = -5(t+1)(t-5) = 0$$

を解いて $t = 5$ [s]（-1 [s] は不適）であることから，$h(t)$ と $v(t)$ の定義域は区間 $[0,5]$ である．

$$h(t) = -5\,(t^2 - 4t) + 25 = -5\left\{(t-2)^2 - 4\right\} + 25 = -5(t-2)^2 + 45$$

より，$h(t)$ のグラフは $t = 2$ に軸をもち，$(2,45)$ を頂点にもつ上に凸な放物線で，x 切片は 5，y 切片は 25 に注意してグラフを描くと図 1.26 のようになる．したがって，ボールは 2 秒後に最高点 45[m] に達し，$h(t)$ の値域は区間 $[0,45]$ である．

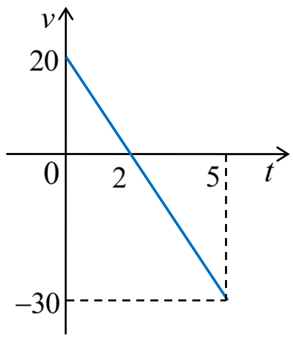


図 1.27

また，$v(t)$ のグラフは傾き -10 の直線で，x 切片は 2，y 切片は 20 に注意して描くと図 1.27 のようになる．$v(t)$ の値域は $[-30,20]$ である．

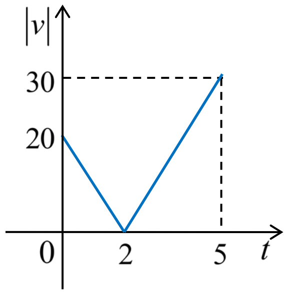


図 1.28

最後に，速さ $|v(t)|$ は，$0 \le x \le 2$ では $v(t) > 0$ だから $v(t)$ と同じになるが，$2 < t \le 5$ においては $v(t) < 0$ だから，$|v(t)| = -v(t) = 10t - 20$ になることに注意する．また，ボールが地表に落下するときの速度は $v(5) = -30$ だから，その速さは 30 [m/s] である．したがって，これらに注意して $|v(t)|$ のグラフを描くと図 1.28 のようになり，$|v(t)|$ の値域は $[0,30]$ である．■

べき関数

次にグラフの**対称性**について述べよう．最も簡単な**べき関数** $f(x) = x^n$ を例にとって，$n = 1,2,3,\cdots$ の場合のグラフを描いてみると，指数 n の偶奇性によってそのグラフが規則的な対称性を示すことがわかる．すなわち，$f(x) = x^2, x^4, \cdots$ のように n が偶数のときはこの関数のグラフは y 軸に関して左右対称であり，一方 $f(x) = x, x^3, \cdots$ のように n が奇数のときは原点に関して対称であることがわかる．

偶関数・奇関数

このように，グラフが y 軸に関して対称であるような関数を**偶関数**（even function）といい，原点に関して対称であるような関数を**奇関数**（odd function）という．いま，関数を $y = f(x)$ とし，この関係を数式で表現すると次のようになる（図 1.29 参照）．

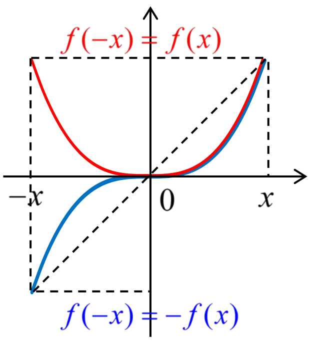


図 1.29

f が偶関数 $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$　（グラフ $y = f(x)$ が y 軸に関して対称）
f が奇関数 $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$（グラフ $y = f(x)$ が原点に関して対称）

このような対称性をもつ関数のグラフは，$x \ge 0$ の範囲でグラフを描けば $x < 0$ の部分は自動的に対称性によって定まる．

他の偶関数・奇関数の例として $f(x) = |x|$（図 1.30）および $f(x) = \dfrac{1}{x}$（図 1.31）を挙げておこう．

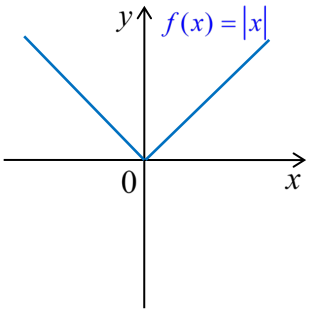


図 1.30

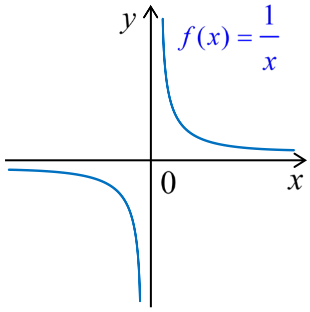


図 1.31

相似変換

問 2　$f(x)=a|x|$　および　$f(x)=a/x$　のグラフはどのようになるか．$a>0$ および　$a<0$　の場合に分けてそのグラフを描け（このように元のグラフを定数倍する操作を**相似変換**（similarity transformation）という）．

絶対値関数

1 次関数の絶対値関数のグラフは上の基本的な関数の相似変換と平行移動によって描くことができる．

例題 7　次の関数のグラフを描け．

(1)　$y=|x-1|+2$　　　(2)　$y=|2x+3|-1$

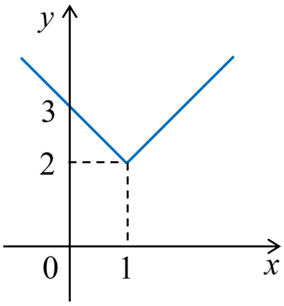


図 1.32

解：(1)　$y=|x|$　のグラフを　$(1,2)$　だけ平行移動すればよい．y 切片は　$x=0$　とおくと　$y=|-1|+2=3$　（図 1.32 参照）．

(2)　$y=2\left|x+\dfrac{3}{2}\right|-1=2\left|x-(-\dfrac{3}{2})\right|-1$　と書き換えると，これは絶対値関数　$y=2|x|$　のグラフを　$(-\dfrac{3}{2},\,-1)$　だけ平行移動したものである（図 1.33 参照）．x 切片は　$y=|2x+3|-1=0$　を解いて　$2x+3=\pm1$，　すなわち　$x=-1,\,-2$．y 切片は　$x=0$　とおいて，　$y=2$　を得る．▮

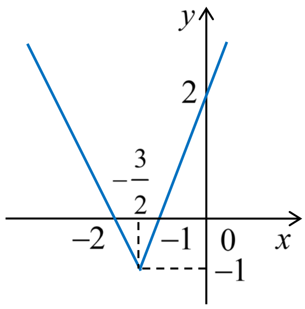


図 1.33

有理関数

1 次分数関数のグラフも同様に平行移動と相似変換を利用して描かれる（一般の有理関数については後述）．

例題 8　次の関数のグラフを描け．

(1)　$y=\dfrac{3}{x-2}-1$　　　(2)　$y=\dfrac{x}{x+1}$

解：(1)　$y=\dfrac{3}{x}$　のグラフを　$(2,\,-1)$　だけ平行移動すればよい．したがって，漸近線は　$x=2$　および　$y=-1$　である．x 切片は　$y=\dfrac{3}{x-2}-1=0$　を解いて

$x=5$．y 切片は $x=0$ より $y=-\dfrac{5}{2}$（図 1.34 参照）．

(2) $y=\dfrac{(x+1)-1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$．よって，$y=-\dfrac{1}{x}$ のグラフを x 方向に -1，y 方向に $+1$ だけ平行移動したものである．原点を通るから x 切片と y 切片は 0 である（図 1.35 参照）．■

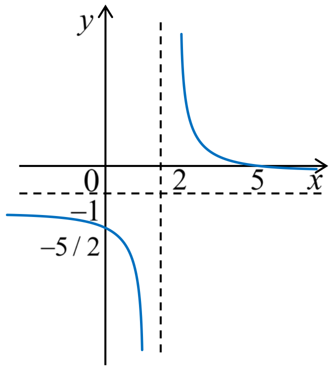


図 1.34

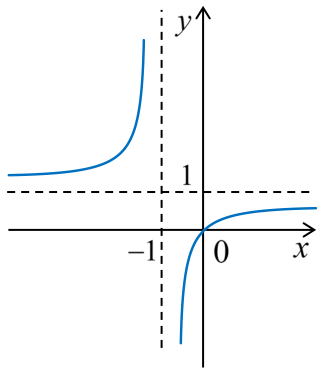


図 1.35

無理関数

次に，無理関数のグラフを考えよう．まず，1 次関数の平方根の形の関数 $y=\sqrt{ax+b}$ $(a\neq 0)$ を考える．これを変形すれば，$y=\sqrt{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}$ となるから，グラフは $y=\sqrt{ax}$ を x 方向に $-\dfrac{b}{a}$ だけ平行移動して得られる．

問 3　$y=\sqrt{ax}$ のグラフは $a>0$ および $a<0$ の場合にそれぞれ図 1.36 および図 1.37 のようになることを確かめよ．

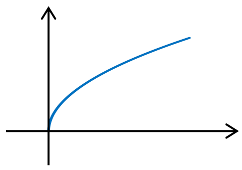


図 1.36　$y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$

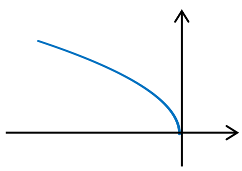


図 1.37　$y=\sqrt{ax}$ $(a<0)$

例題 9　次の関数のグラフを描け．

(1) $y=\sqrt{x+4}-1$　　　(2) $y=1-\sqrt{1-2x}$

解： (1) $y=\sqrt{x}$ を x 方向に -4，y 方向に -1 だけ平行移動すればよい．x 切片は $y=\sqrt{x+4}-1=0$ を解いて $x=-3$．y 切片は $x=0$ とおくと $y=1$ である．したがって，図 1.38 のようなグラフになる．

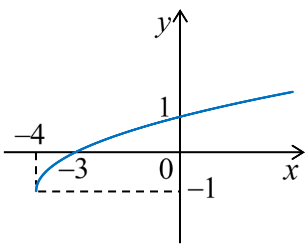


図 1.38

(2) 与式を変形すると $y=1-\sqrt{-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}$ だから，これは $y=-\sqrt{-2x}$ のグラフを $(1/2,1)$ だけ平行移動したものである．原点を通るから x 切片と y 切片は 0 である（図 1.39 参照）．■

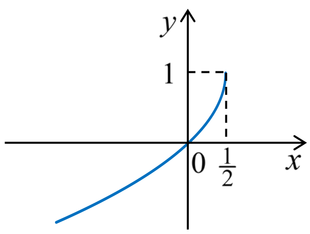


図 1.39

最後に，基本的な関数の平行移動の形に変形できない関数はどのように描けばよいのだろう．物理や工学ではいろいろな関数を用いるのでむしろこのような場合のほうが多いかもしれない．しかし，どのような場合でも当てはまるような方法はなく，それぞれの場合に上に掲げた留意点に従って描いていくしかない．次の例で会得してほしい．

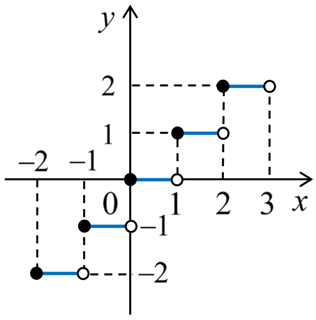


図 1.40

例題 10　実数 x に対して

$$f(x)=[x]:=\ x\text{ を超えない最大の整数}$$

と定義するとき，関数 $y=f(x)$ のグラフを描け．（これはガウスの階段関数と呼ばれている．以下では，「$A:=B$」は A を B で定義する場合に用いる．）

解：x を小数で表して，整数部分を n，小数点以下の数を α で表すと，$x=n+\alpha\ (0\le\alpha<1)$ とかける．すなわち，n は $n\le x<n+1$ を満たす整数である．このとき，$f(x)=[x]=n$ となる．すなわち，x の小数点以下 α を切り捨てる関数に他ならない（図 1.40 参照）．▮

例題 11　次の関数 $y=f(x)$ のグラフを描け．

(1)　$f(x)=\dfrac{x}{|x|}$　　　　(2)　$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

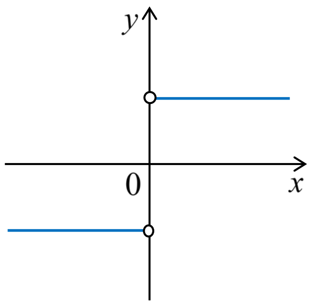


図 1.41

解：(1) まず，定義域は0でない実数であることに注意する．$x>0$ のときは $y=\dfrac{x}{x}=1$，$x<0$ のときは $y=\dfrac{x}{-x}=-1$．よって，グラフは図 1.41 のようになる（これは奇関数であることに注意せよ）．

(2)　$y=f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$ と変形すると，これは2つの関数 $y=\dfrac{1}{2(x-1)}$（図 1.42）と $y=-\dfrac{1}{2(x+1)}$（図 1.43）の和として表される．これらに注意してグラフを描くと図 1.44 のようになる．関数 $f(x)$ は偶関数であることに注意する．▮

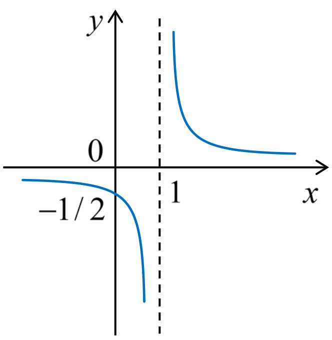


図 1.42　$y=\dfrac{1}{2(x-1)}$

＋

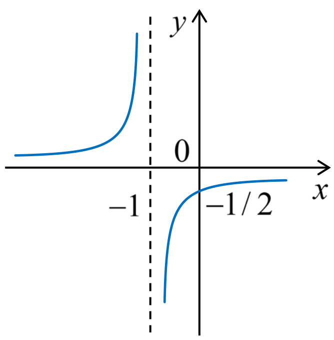


図 1.43　$y=-\dfrac{1}{2(x+1)}$

＝

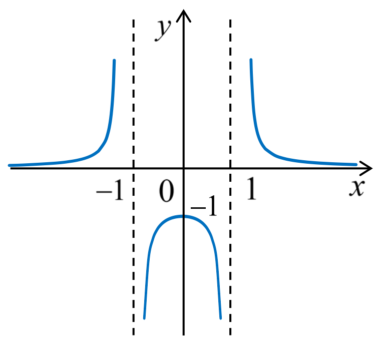


図 1.44　$y=\dfrac{1}{x^2-1}$